

多极子面元法近水面椭球体兴波时域研究

沈王刚

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院 海洋工程国家重点实验室, 上海, 200240)

摘要: 利用 Rankine 源面元法求解潜体兴波问题具有一定的优势, 然而随着问题规模的扩大, 求解效率将快速下降, 使其难以高效运用于大规模以及时域问题研究。结合快速多极子法与传统面元法, 可以克服这一局限性, 使计算效率和规模大幅度提高。本文将应用多极子面元法求解潜体兴波时域问题, 与传统面元法进行比较, 证明其高效性; 与已有研究结果进行比较, 证明其精确性。

关键词: Rankine 源; 面元法; 椭球体; 兴波; 时域; 快速多极子法;

Multipole panel method for the time-domain wave making research for ellipsoid near free surface

SHEN Wang-gang, LIN Zhi-liang

(State Key Lab of Ocean Engineering School of Naval Architecture Ocean and Civil Engineering, Shanghai JiaoTong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Using Rankine source panel method for solving wave making problems of submerged body has certain advantages, but with the expansion of the scale of the problem, the solving efficiency will decline rapidly, making it difficult to applied to large-scale problem and time-domain research efficiently. Combining the traditional panel method with the fast multipole method can overcome this limitation, and the computation efficiency and calculation scale will be greatly improved. In this paper, the multipole panel method will be used to calculate the wave making problem of submerged body in time domain, and compared with the traditional panel method to prove its efficiency; the results will also be compared with previous studies to prove its accuracy.

Key words: Rankine source; panel method; ellipsoid; wave making; time domain; fast multipole method;

研究潜体近水面航行时的兴波现象及其力学特性, 一直是一项具有重要工程意义的课题。尤其近几年各类附加水翼新概念船型的大量涌现, 使得潜体兴波研究显得更为重要。由于计算效率的限制, 以往对潜体兴波研究主要采用定常方法。如 Farell 改进了 Havelock 源格林函数, 推导得到潜航回转椭球体在 Neumann-Kelvin 问题下的半解析理论解^[1]; Doctors 和 Beck 研究了潜体在 Neumann-Kelvin 问题下, 采用 Havelock 源计算的收敛性^[2]。随着时代的发展, 时域方法以其可以计算非定常兴波, 得到运动物体实时兴波信息, 便于仿真模拟和后处理等优点, 吸引了越来越多学者的注意。

自从 Hess 和 Smith^[3]第一次应用面元法求解三维物体绕流问题以来, 面元法在船舶与海洋工程领域得到了广泛的应用。其中 Rankine 源形式简单, 具有较高灵活性, 且易于推广到非线性计算, 已经有不少学者尝试使用 Rankine 源处理兴波问题^[4-5]。

然而, 传统的面元法在求解问题时, 需要计算每个面元与配置点之间的相互作用, 生成一个 N 阶方阵 (N 为离散面元个数)。一方面储存这个 N 阶稠密矩阵需要大量的内存空间, 另一方面求解该矩阵也将耗去大量时间。例如采用高斯消去法直接求解, 时间复杂度将达到 $O(N^3)$, 即使使用迭代法求解, 时间复杂度也有 $O(N^2)$ 。计算效率上的缺陷将面元法的应用限制在了小规模流场, 更遑论时域计算时需要进行多次时间步进迭代, 计算规模将被进一步压缩。为克服传统面元法这一局限性, 我们引入快速多极子法, 可同时减小存储量与时间复杂度。

快速多极子法最早由 Rokhlin^[6]于 1985 年提出,用来加速二维势流问题的求解。此后 Liu^[7]、Nishimura^[8]及 Yoshida^[9]等人将快速多极子法和边界元法结合,并对其进行深入研究。多极子法与边界元法的结合已被证实可以大幅度提高其计算效率,适用于求解大规模势流问题^[10-11]。

本文结合多极子法与面元法,对三维潜体的兴波特性进行时域研究,将所得的结果与传统方法结果进行比较,证明多极子面元法高精度与高效率的特性。

1 潜体兴波问题描述

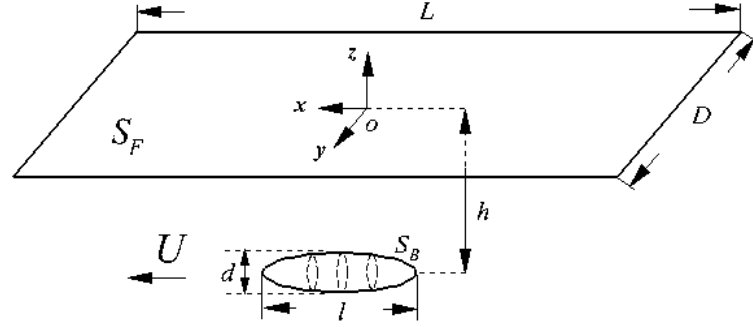


图 1 计算流场示意图

Fig. 1 The schematic of computational flow field

考虑如图 1 所示的计算流场, O - xyz 为三维笛卡尔直角坐标系, xy 平面与自由面平行, 潜体沿 x 轴方向以速度 U 运动, z 轴垂直向上, 整个流场边界由潜体物面 S_B 和自由面 S_F 组成。潜体的特征长度为 l , 特征宽度为 d , 潜体中心距自由表面深度为 h 。对于时域兴波问题, 自由面条件中对流项起到主要作用, 足够远处将自由水面截断, 截断边界上的反射对势流解的影响并不敏感^[12]。因此本文中采用截断有限自由表面代替无限自由表面, 其长为 L , 宽为 D 。假设流体无压、无粘并且无旋, 流场中存在一速度势 ϕ , 满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

在潜体表面 S_B 上满足不可穿透条件, 即

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U \cdot n \quad (2)$$

其中 n 为指向物面外的法向量。自由面上的运动学边界条件为:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\tilde{\nabla} \phi \cdot \tilde{\nabla} \eta + \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3)$$

其中, $\tilde{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, η 为自由面兴波形状。自由面上的动力学边界条件为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2, \quad z = \eta(x, y, t) \quad (4)$$

在本文时域兴波问题中, 假设潜体由静止快速启动至匀速运动状态, 且在自由面 S_F 上初始条件 ($t=0$) 为:

$$\phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \eta = 0 \quad (5)$$

2 传统面元法求解

首先将整个流场的边界划分成 N 个离散面元, 其中前 N_B 个为三角形常数面元, 用于表征潜体表面; 后 N_F 个为四边形常数面元, 用于表征自由水面, 则有 $N=N_B+N_F$ 。第 i 个面元的面积为 S_i , 其上均匀分

布强度为 σ_i 的面源。此时，可得到流场中任一点的诱导速度势为

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{4\pi} \iint_{S_i} \frac{1}{r} dS, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (6)$$

诱导速度为

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{4\pi} \iint_{S_i} \nabla \frac{1}{r} dS, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7)$$

式中， $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ， $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$ 为从第 i 个面元上点 $Q(x_i, y_i, z_i)$ 到场点 $P(x, y, z)$ 的距离。

此外，选取每一个常数面元的中点为配置点，在每一个配置点上满足已知的边界条件，例如在 $t=0$ 初始时刻，潜体物面上的配置点应满足式 (2)，而自由表面上的配置点应满足式 (5) 中的 $\phi=0$ 。据此可得到如下线性方程组，即

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n_i} dS = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_i, \quad (i=1, \dots, N_B) \quad (8)$$

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{1}{r} dS = 0, \quad (i=N_B+1, \dots, N_B+N_F) \quad (9)$$

采用高斯积分计算上述线性方程组中的积分项，但当 $i=j$ ，即面源与配置点重合时，积分将会有奇异性产生。在本文中，对于 $1/r$ 项，我们利用极坐标积分来消除奇异性^[13]；对于 $\partial(\frac{1}{r})/\partial n_i$ 项，取第 i 个面源对

自身的诱导速度为 $-\frac{\sigma_i}{2} \mathbf{n}_i$ ^[14]。从而线性方程组 (8) 和 (9) 可简化为如下代数方程：

$$\mathbf{A}\sigma = \mathbf{B} \quad (10)$$

其中， \mathbf{A} 为系数矩阵， σ 为待求源强向量， \mathbf{B} 为右端已知向量。

求解线性方程组 (10) 可得到每个面元上面源强度 σ_i ，进一步利用式 (6) 和 (7) 分别求得整个流场中的速度势和速度分布。利用伯努利方程可求得潜体表面离散单元中心点处的压力分布为：

$$p = -\rho \frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2 + \rho \nabla \phi \cdot \mathbf{U} - \rho g z \quad (11)$$

其中， $\frac{D\phi}{Dt}$ 为 ϕ 的随体导数。进而得到潜体所受的升力和兴波阻力分别为：

$$R_L = -\sum_{i=1}^{N_B} \iint_{S_i} p_i \cdot n_{iz} dS \quad (12)$$

和

$$R_W = -\sum_{i=1}^{N_B} \iint_{S_i} p_i \cdot n_{ix} dS \quad (13)$$

其中 n_{ix} 为向量 \mathbf{n}_i 在 x 方向的分量， n_{iz} 为向量 \mathbf{n}_i 在 z 方向的分量。无量纲化处理后，得到升力系数和阻力系数为：

$$C_L = \frac{R_L}{\frac{1}{2} \rho U^2 S_B}, \quad C_w = \frac{R_w}{\frac{1}{2} \rho U^2 S_B} \quad (14)$$

对于整个时域计算过程则采用时间步进法。假设已知 $t = n \cdot \Delta t$ 时刻自由面上 $\phi^{[n]}$ 和 $\eta^{[n]}$ 分布，自由表面

上以 $\phi = \phi^{[n]}$ 为边界条件，物面上以公式 (2) 为边界条件，利用面元法求得源强分布，进而根据公式 (7) 求得自由表面上速度分布 $(\nabla\phi)^{[n]}$ ，对 η 进行差分得到 $(\tilde{\nabla}\eta)^{[n]}$ ，然后利用公式 (3) 和 (4) 分别求得到 $\partial\phi/\partial t$ 和 $\partial\eta/\partial t$ ，并记为 $(\partial\phi/\partial t)^{[n]}$ 和 $(\partial\eta/\partial t)^{[n]}$ 。因此， $t = (n+1) \cdot \Delta t$ 时刻自由面上 $\phi^{[n+1]}$ 、 $\eta^{[n+1]}$ 分布可根据如下时间向前差分公式获得，即

$$\frac{\phi^{[n+1]} - \phi^{[n]}}{\Delta t} = (\partial\phi/\partial t)^{[n]} \quad (15)$$

$$\frac{\eta^{[n+1]} - \eta^{[n]}}{\Delta t} = (\partial\eta/\partial t)^{[n]} \quad (16)$$

在 $t = (n+1) \cdot \Delta t$ 时刻，将物体向运动方向移动 $U \cdot \Delta t$ 距离，更新物面和自由水面面元，将 $\phi^{[n+1]}$ 和 $\eta^{[n+1]}$ 作为已知变量，重复上述过程，最终可获得潜体在整个计算时间内的兴波波形，以及升力和阻力的变化情况。

常数面元法的优点在于公式推导简单，易于应用；但为了提高精度，需要增加离散面元数目，使得计算规模增大、计算效率降低。此外，不少学者尝试使用高阶面元法求解势流问题，如 Liu Y H^[15]、Romate J E^[16]等。尽管计算精度和效率有所提升，高阶面元法仍无法有效克服传统面元法求解大规模流场问题的缺陷。因此，在本文中，我们采用快速多极子方法加速传统常数面元法计算，求解大规模流场时域兴波问题。

3 多极子面元法

传统面元法计算时，线性方程组 (10) 中系数矩阵 A 是一个稠密、非对称矩阵，采用高斯消元法求解需要 $O(N^3)$ 的运算量，而采用迭代求解，运算量仍达到 $O(N^2)$ 。因此，当计算单元增多时，传统面元法的计算量和存储量非常大，从而限制了其求解未知量个数较多问题的能力，尤其是需多增加一维度计算的时域势流问题。为了克服传统面元法这一缺陷，我们将引入快速多极子法。将快速多极子方法应用到传统面元法中矩阵 A 与向量 σ 的乘积计算，并结合迭代求解器（如 GMRES 等），可以建立所谓的快速多极子面元法。

快速多极子法与传统面元法的结合过程和其与传统边界元法结合过程相同，详细内容可参考文献^[7-9]。在本节中，我们将简要介绍快速多极子方法的主要思想、基本公式和与面元法结合后的计算步骤。

3.1 多极子法主要思想

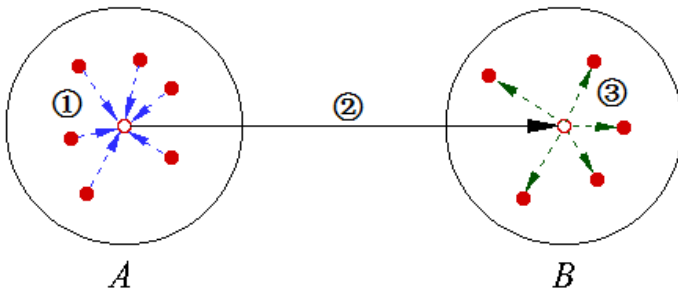


图 2 多极子计算示意图

Fig. 2 The schematic of multipole calculation

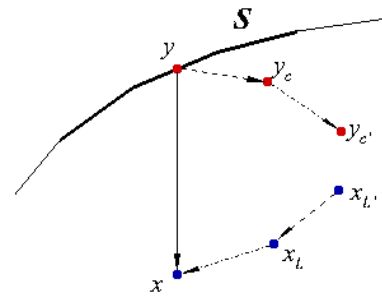


图 3 多极子展开关键点

Fig. 3 Related points in multipole expansion

以粒子在粒子群中受力为例，两两直接计算再求和策略的计算量级是 $O(N^2)$ ，其中 N 表示粒子数量。快速多极子法将所有粒子按其空间位置分成不同的集合（如图 2 中的 A 和 B ），首先将粒子对外的作用力汇聚到集合内一点（如图 2 中的①过程），其次计算集合与集合之间的相互作用力（如图 2 中的②过程），最后将集合所受到的外界作用力分配到集合内每一个粒子（如图 2 中的③过程）。对于相距很近的粒子，

相互间作用力直接计算得到；而对于相距较远的粒子，相互间的作用力则采用上述多极子方法展开得到，从而将计算量级减少至 $O(N \log N)$ ^[7-9]。其中区分粒子间距关系，可采用树状结构划分策略^[17]加以实现。在传统面元法中，主要过程在于计算边界离散面元间的相互作用，因此可以采用快速多极子方法来提高计算效率。

3.2 多极子法基本公式

关于多极子法公式具体推导请参见文献^[7-9]，这里我们以面元法中三维 Rankine 源诱导速度势核函数多极子展开为例，其展开形式如下：

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{S_{n,m}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_c) \cdot R_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c) \quad , \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}_c| > |\mathbf{y} - \mathbf{y}_c| \quad (17)$$

式中 n 为多极子展开阶数（实际计算时截取到有限项）， \mathbf{y}_c 为靠近源点 \mathbf{y} 的多极子展开中心， \mathbf{x} 为配置点，

$\overline{S_{n,m}}$ 代表 $S_{n,m}$ 的共轭函数。其中两个立体调和函数 $R_{n,m}$ 及 $S_{n,m}$ 定义如下：

$$R_{n,m}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} r^n \quad (18)$$

$$S_{n,m}(\mathbf{x}) = (n-m)! P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (19)$$

式中 (r, θ, ϕ) 为 \mathbf{x} 在球坐标下的分量。连带勒让德函数定义如下^[17]：

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (20)$$

式中 $P_n(x)$ 为 n 阶勒让德多项式。同样 Rankine 源诱导速度的核函数则可展开如下，

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{S_{n,m}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_c) \cdot \frac{\partial R_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c)}{\partial x_i} \quad , \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}_c| > |\mathbf{y} - \mathbf{y}_c| \quad (21)$$

式中 $x_i (i=1,2,3)$ 分别代表 x, y, z 三个方向。

得到核函数的展开形式后，即可得到积分方程的展开形式如下，

$$\iint_{S_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_i dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{S_{n,m}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_c) \cdot M_{n,m}(\mathbf{y}_c) \quad , \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}_c| > |\mathbf{y} - \mathbf{y}_c| \quad (22)$$

$$\iint_{S_i} F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_i dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{S_{n,m}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_c) \cdot \tilde{M}_{n,m}(\mathbf{y}_c) \quad , \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}_c| > |\mathbf{y} - \mathbf{y}_c| \quad (23)$$

式中 $M_{n,m}$ 及 $\tilde{M}_{n,m}$ 是以 \mathbf{y}_c 为中心的多极子动量矩，并定义如下，

$$M_{n,m}(\mathbf{y}_c) = \iint_{S_i} R_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c) \sigma_i dS \quad (24)$$

$$\tilde{M}_{n,m}(\mathbf{y}_c) = \iint_{S_i} \frac{\partial R_{n,m}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_c)}{\partial x_i} \sigma_i dS \quad (25)$$

同时还可以将多极子动量矩中心从 \mathbf{y}_c 转移到 \mathbf{y}_c' ($M2M$):

$$M_{n,m}(y_{c'}) = \iint_{S_i} R_{n,m}(y - y_{c'}) \sigma_i dS = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n',m'}(y_c - y_{c'}) \cdot M_{n-n',m-m'}(y_c) \quad (26)$$

上式对 $\tilde{M}_{n,m}$ 同样适用。

对于核函数的局部展开系数则定义如下：

$$\iint_{S_i} G(x, y) \sigma_i dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{n,m}(x - x_L) \cdot L_{n,m}(x_L) \quad (27)$$

式中的局部展开系数 $L_{n,m}(x_L)$ 通过 $M2L$ 转移得到，即

$$L_{n,m}(x_L) = (-1)^n \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \overline{S_{n+n',m+m'}}(x_L - y_c) \cdot M_{n',m'}(y_c) \quad , \quad |y_c - x_L| > |x - x_L| \quad (28)$$

式中 x_L 为局部展开中心。局部展开中心从 x_L 到 $x_{L'}$ 的转移可以通过 $L2L$ 转移得到，

$$L_{n,m}(x_{L'}) = \sum_{n'=n}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'-n,m'-m}(x_{L'} - x_L) \cdot L_{n',m'}(x_L) \quad (29)$$

上式所示局部展开同样适用于诱导速度核函数 $F_i(x, y)$ 。

3.3 多极子面元法计算步骤

在此只简要介绍多极子面元法的计算步骤，具体请参见文献^[18]。

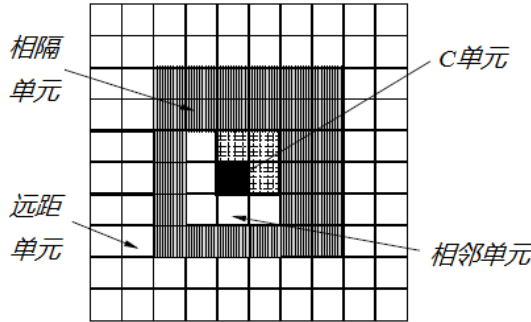


图4 正方形单元相互关系

Fig. 4 Relations between square cells



图5 向上和向下传递过程

Fig. 5 Upward and downward passes

第一步，与传统面元法一样对边界进行单元离散，布置面源，选取配置点。

第二步，划分树状结构。以二维问题为例，利用逐层嵌套的正方形来划分空间树状结构。首先利用一个足够大的正方形包围整个边界 S ，并定义其层级数为 0 级。考察第 L 层级的正方形单元 C ，将其均分为 4 个小正方形单元，层级为 $L+1$ ，正方形单元 C 是它们的父单元。若某离散边界单元的中点位于小正方形单元内，则认为其属于该小正方形单元。对于 4 个小正方形单元，分成三种情况。若该小正方形单元内离散边界单元数为 0，则将它舍弃，不计入树状结构内；若该小正方形单元内离散边界单元数大于 0，且不大于事先给定的常数 p 时，将其定义为叶单元，不再往下划分；若该小正方形单元内离散边界单元数大于常数 p 时，则继续将其往下划分。如此嵌套割划，直到最后一层均为叶单元，或达到规定最大层数则停止。对于正方形单元之间的空间关系，我们定义如下（见图 4）：若两个正方形单元共用一个角点，则定义它们为

[键入文字]

相邻单元；若两个正方形单元不相邻，但其父单元相邻，则定义它们为相隔单元；若两个正方形单元的父单元也不相邻，则定义它们为远距单元。

第三步，向上传递。首先通过式(24)或(25)计算各个叶单元的多极子动量矩，其次利用式(26)将叶单元的多极子动量矩转移到其父单元中。以此类推，多极子动量矩不断上聚，直至第二层。

第四步，向下传递。对于相隔单元，通过式(28)计算其作用；对于远距单元，则利用式(29)将父单元通过 $M2L$ 或 $L2L$ 得到的局部展开系数继承到子单元，以此来计算其作用。如此类推，直到得到每个叶单元的局部展开系数。向上传递和向下传递过程请参见图 5。

第五步，近场远场作用叠加。对于某叶单元 C 中的配置点 \mathbf{x} ，利用传统面元法的直接作用计算该叶单元及相邻单元中其他离散面元对其的作用，利用式(27)将局部展开系数从单元中心转移到配置点 \mathbf{x} 以计算相隔或远距单元中离散面元对其的作用。将近场和远场的作用叠加，就得到了整个边界所有离散面元对配置点 \mathbf{x} 的作用。

第六步，利用 GMRES 求解式(10)，若迭代误差小于设定值，则终止运算，否则返回第三步进行下一步迭代。本文中迭代误差设定值均取为 10^{-4} 。

4 计算结果与分析

4.1 近水面回转椭球体匀速直航兴波问题

本小节将以近水面回转椭球体匀速直航产生的兴波波形和兴波升力、阻力为切入点，阐述如何选取合适的自由面计算域和自由面及物面网格密度，验证使用多极子面元法计算潜体兴波问题的可行性，并将多极子面元法与传统面元法进行计算效率对比。

计算模型为回转椭球体，长轴长 $l=1.0m$ 、短轴长 $d=0.2m$ 的回转椭球在自由水面下（球心距静水面距离为 $h=0.16m$ ）从静止状态突然启动，达到常速 $U=1.566m/s$ 并沿 x 轴正向匀速直航， $Froude$ 数为 $Fr=U/\sqrt{gl}=0.5$ ，浸深比为 $h/l=0.16$ 。椭球表面网格划分如图 6 所示，其中(a)椭球面元数为 528, (b)椭球面元数为 1304, 网格划分时均为两端密，中间疏；(c)椭球面元数为 2640, 网格划分时两端与中间均加密。

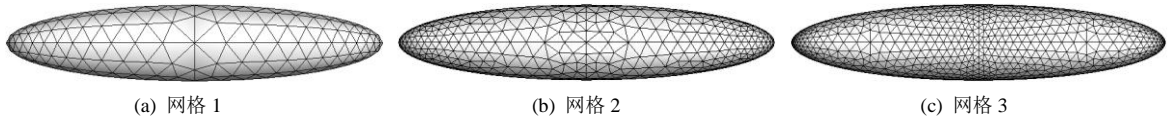


图 6 椭球网格划分

Fig. 6 The mesh generation of ellipsoid

自由面的网格密度和时间步长会直接影响到计算量、波面的光滑程度以及兴波水动力学参数的准确性，网格和时间步长的选取参照的是 Dommermuth 等人通过大量数值试验得到的经验公式^[19]：

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{8}{\pi} \frac{\Delta x}{g}, \quad \Delta x \leq \frac{8}{\pi} \frac{U_x^2}{g} \quad (30)$$

其中， Δt 为时间步进间隔， Δx 为自由面网格间距， U_x 为潜体纵向速度分量。本文选取的网格布置及时间步长配置均满足上式。

4.1.1 自由面静网格

自由面为一足够大的长 $L=20m$ ，宽 $D=6m$ 的矩形平面，对称于坐标系原点。椭球球心初始坐标为 $x=-7.5$ ， $y=0$ ，沿 x 轴正向匀速直航。

椭球网格划分如图 6(b)所示。自由面网格密度有三套，其中粗网格选取为 100×30 ，网格间距为 $\Delta x=0.2$ ；中网格选取为 150×45 ，网格间距为 $\Delta x=0.133$ ；细网格选取为 200×60 ，网格间距 $\Delta x=0.1$ 。时

间步长间隔为 $0.04s$ ，步进次数 200 次，总模拟时间 $8s$ 。

图 7 为 $t=8s$ 时波面图，经过对比可发现，粗网格与细网格所描绘出的波面波形图及等高线图基本一致，但粗网格仍有一些波面锯齿，而细网格的波面则光滑许多。对比图 8 亦可发现，三种网格描绘出的自由面中剖面二维波形图在第一个波谷处有比较明显的差别，除此之外中网格和细网格的结果完全贴合，而粗网格则与其他两种网格差别较大。

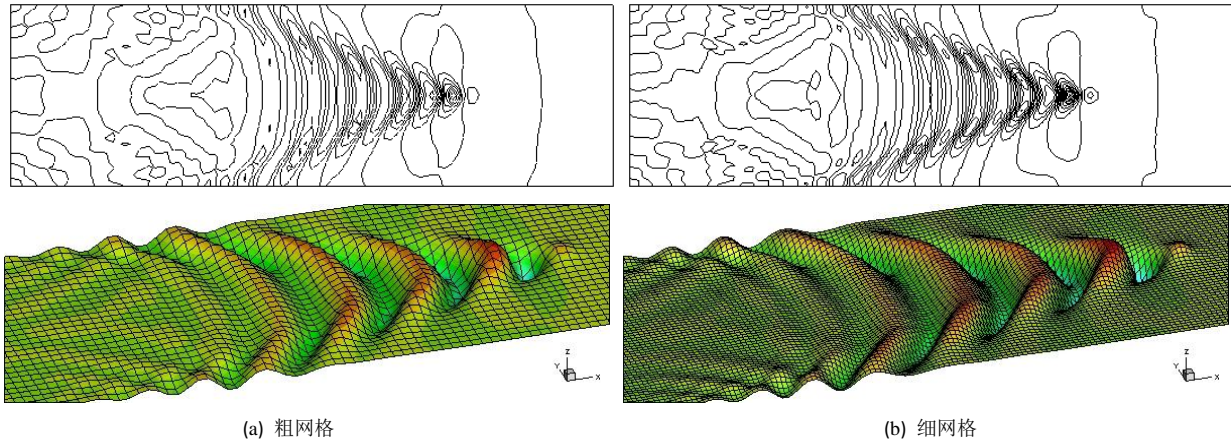


图 7 $t=8s$ 时波面图

Fig. 7 The wave surface at $t=8s$

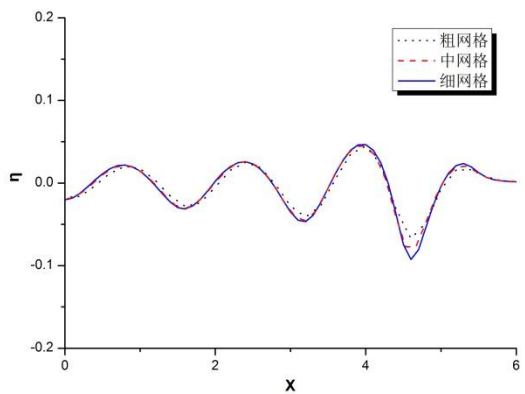


图 8 $t=8s$ 时自由面二维波形图 ($y=0$)

Fig. 8 The 2D waveform of free surface at $t=8s$ ($y=0$)

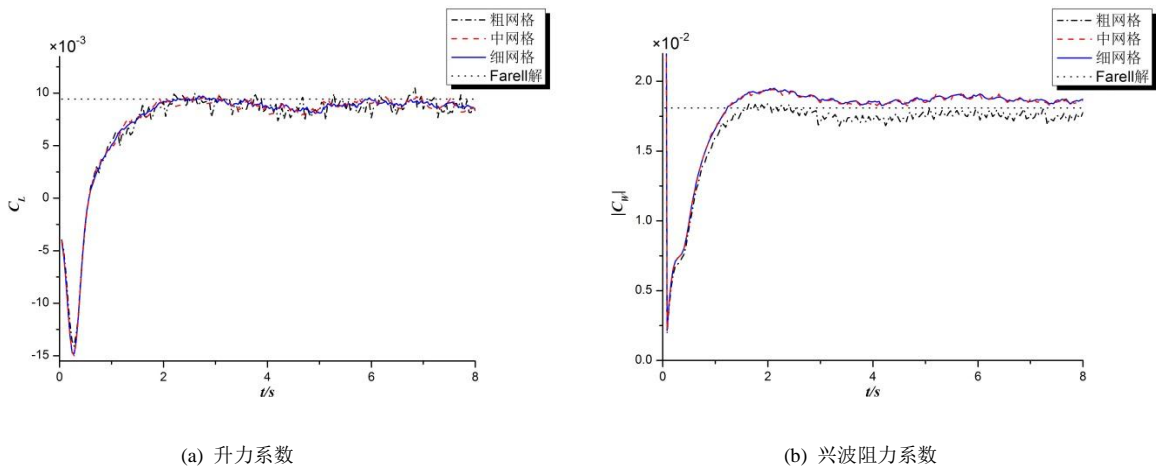


图 9 兴波水动力参数随时间变化情况

Fig. 9 The change of wave making hydrodynamic parameters over time

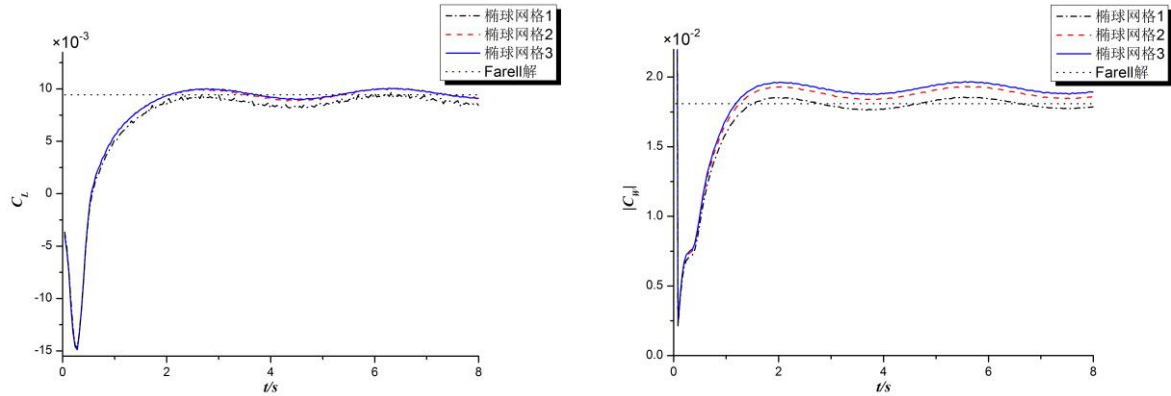
其次考察兴波导致的椭球体升力、阻力。图 9 中(a)为升力系数随时间变化情况, (b)为兴波阻力系数随时间变化情况。图中圆点直线为 Farell 解^[1], 三种网格所计算得到的力学系数都能收敛到 Farell 解附近。然而粗网格结果, 特别是其升力系数的波动很大, 毛刺明显; 中网格和细网格的毛刺较粗网格有所减少, 但仍然比较明显。此外, 粗网格计算得到的升力系数收敛值和其他两种网格比较吻合, 但兴波阻力收敛值有比较明显的差别, 显示粗网格密度并不够, 计算精度低; 同时随着自由面网格不断加密, 其计算结果也将逐渐收敛。

使用静网格固然能描述潜体的整个尾后兴波波面, 但其取的自由面计算域过大, 网格数量过多, 时间效率低下; 此外有大片自由面区域在长时间内兴波影响很小, 是一种计算资源浪费。为了能提高计算效率, 减少计算资源浪费, 我们使用能随潜体一起前进的动网格来进行兴波时域计算。

4.1.2 自由面动网格与网格密度

自由面为一个长 $L=8m$, 宽 $D=5m$ 的矩形平面, 初始时刻对称于坐标系原点。椭球球心初始坐标为 $x=1.5$, $y=0$, 沿 x 轴正向匀速直航。

椭球网格划分有三套, 如图 6(a)、(b)、(c)所示。自由面网格密度选取为 80×50 , 网格间距 $\Delta x=0.1$ 。时间步长间隔为 $0.04s$, 步进次数 200 次, 总模拟时间 $8s$ 。在每一次步进后, 若椭球中心与网格中心的距离大于 $1.5 + \Delta x$, 则将网格向 x 轴正向移动一个网格间距, 相当于消去最后一排网格, 并在第一排网格前方再加上一排网格, 其初始条件如式 (5) 所示。



(a) 升力系数

(b) 兴波阻力系数

图 10 不同物面网格下兴波水动力参数随时间变化情况

Fig. 10 The change of wave making hydrodynamic parameters over time in different object surface mesh

从图 10 中可以看到, 虽然动网格的网格密度与静网格中细网格密度相同, 但其计算结果中的毛刺现象却有大幅度改善, 究其原因可能是静网格所取的自由面计算域过大, 潜体相对网格的位置变化明显, 在网格密度不够绝对密的情况下毛刺就会比较多, 从图 9 中也可看出, 当自由面静网格加密后, 毛刺现象有所改善。此外, 1304 面元的椭球网格 2 和 2640 面元的椭球网格 3 所计算得到的升力曲线完全一致, 兴波阻力曲线有略微差别, 但只在 1.8% 左右; 而 528 面元的椭球网格 1 则与其他两种网格计算结果差别较大, 因此可认为随着椭球网格数量的增加, 计算结果将逐渐收敛, 同时 1304 面元的椭球网格 2 精度已经足够。

此外, 考察自由面横向网格密度变化率 q 的影响, $q=1$ 代表横向网格均匀分布, $q>1$ 代表中纵线附近网格密, 横向两端网格疏。表 1 显示了不同横向网格密度变化率下计算所得结果, 其中两种网格布置的横向网格数相同, 均为 50 个。由表中可看出横向网格变化率对计算结果的影响很小, 几乎可以忽略不计。

表 1 不同横向网格密度变化率下兴波水动力学系数

Tab. 1 The wave making hydrodynamic parameters in different changing rate of transverse mesh density

	$q=1$	$q=1.1$	误差
升力系数	0.00901	0.00908	7.77‰
阻力系数	0.01831	0.01829	-1.09‰

4.1.3 计算效率对比

多极子法对传统面元法的改进，首先体现在内存使用量上，传统面元法需要占用 $O(N^2)$ 的内存，普通台式计算机无法驾驭面元数量过万的问题，但多极子面元法只需要占用 $O(N)$ 的内存，使得普通台式计算机也可以计算面元数量达到数百万甚至数千万的大规模问题。表 2 和图 11 是分别采用多极子面元法和传统面元法进行时域单步计算的效率对比，计算环境为 1.9GB 内存和 2.50GHZ*2 处理器。从图表中可以看出，当面元数较小时，使用多极子面元法和传统面元法所需要的计算量相近，甚至当面元数只有数百个时，传统面元法还要略优于多极子面元法；然而随着面元数的增长，多极子面元法所需的计算量近似线性增长，而传统面元法所需的计算量却是以三次方的速度增长，当面元数上万时，使用传统面元法求解不仅在内存上受到限制，在计算时间上也显得不现实。此外，由于时域问题较定常问题要多一个时间维度，因此利用多极子面元法来计算时域问题的可行性和高效性不言而喻，具有巨大的应用潜力。

表 2 多极子面元法和传统面元法单步计算效率比较

Tab. 2 Comparison of single-step computational efficiency between FMBEM&BEM

面元数量 N	722	2654	4304	6640	13304
多极子面元法/s	6.85	101.14	160.90	202.24	444.33
传统面元法/s	6.58	320.79	1205.50	4088.72	32345.48

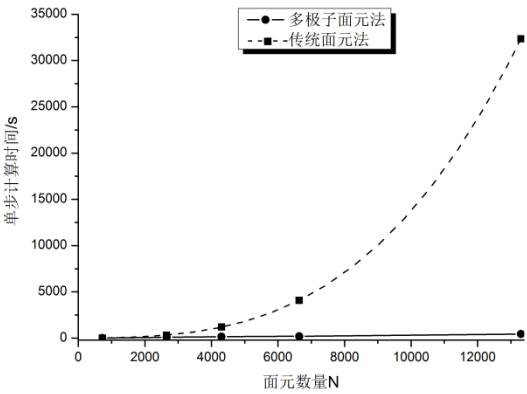


图 11 多极子面元法和传统面元法单步计算效率比较

Fig. 11 Comparison of single-step computational efficiency between FMBEM&BEM

4.2 不同航速及潜深下椭圆定常兴波

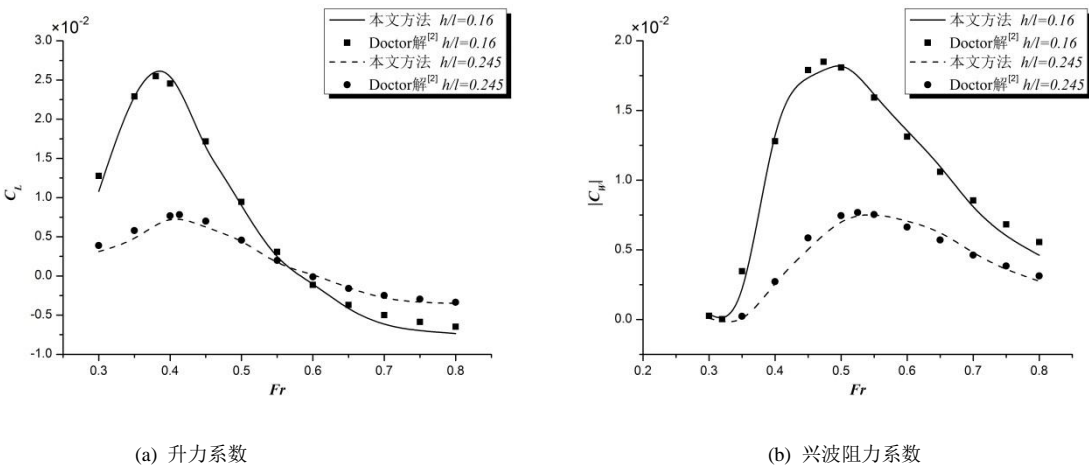


图 12 兴波水动力参数

Fig. 12 The wave making hydrodynamic parameters

本小节将以近水面椭球匀速直航达到稳定状态后所产生的升力和兴波阻力为切入点，说明不同航速和下潜深度对其定常兴波的影响。计算模型与上节一样为回转椭球体，长轴长 $l=1.0m$ 、短轴长 $d=0.2m$ ，改变航速 U 和潜深 h 以研究其定常兴波力学系数的变化情况。

自由面采取动网格，为一个长为 $L=4.5l$ ，宽为 $D=3l$ 的矩形平面，初始时刻对称于坐标系原点，根据参考文献^[20]，计算域的范围设置为上游外端距潜体中长度 $1.5l$ ，下游外端距潜体中长度 $3l$ ，横向两侧各 $1.5l$ 。椭球表面网格划分如图 6(b)所示。

兴波水动力系数如图 12 所示，其中(a)是升力系数随 *Froude*数变化情况，(b)是兴波阻力系数随 *Froude*数变化情况。与 Doctor 解^[2]相比，本文方法所得结果在 $h/l=0.245$ 时吻合较好；在 $h/l=0.16$ 时，高 *Froude*数情况下的升力系数和阻力系数，以及 $Fr=0.45\sim 0.5$ 段的阻力系数会有较为明显的差别，其余部分吻合较好。由图中可以看出，浸深比 $h/l=0.245$ 下升力系数和阻力系数的值总小于浸深比 $h/l=0.16$ 下的值，升力系数在 $Fr=0.4$ 左右达到最大，在 $Fr=0.55\sim 0.6$ 后变为负升力；阻力系数在 $Fr=0.5$ 左右达到最大，在低 *Froude*数时接近零。此外， $h/l=0.245$ 下升力系数和阻力系数最大值所对应的 *Froude*数较 $h/l=0.16$ 略微后移。

5 结语

从计算结果来看，本文所开发的快速多极子面元法可以较准确地预报近水面潜体时域兴波特性，定常兴波计算结果与已有研究结果吻合良好，证明了其合理性与可靠性；且相较于传统面元法，有效地克服了计算规模和效率的局限性，引进了运动网格提高计算精度和效率。本文方法将进一步改进和发展，以计算完全非线性兴波问题、船体兴波问题等，具有较大的应用前景。

参考文献：

- [1] Farell C. On the wave resistance of a submerged spheroid[R]. 1972.
- [2] Doctors L J, Beck R F. Convergence properties of the Neumann-Kelvin problem for a submerged body[J]. Journal of Ship Research, 1987, 31(4).
- [3] Hess J L, Smith A M. Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies[R]. DOUGLAS AIRCRAFT CO LONG BEACH CA, 1962.
- [4] 高志亮, 田晟, 邹早建. 浅水中下潜物体有航速辐射问题的数值解[J]. 船舶力学, 2012, 16(8): 868-876. (GAO Zhi-liang, TIAN Sheng, ZOU Zao-jian. Numerical solution of the radiation problem with forward speed for a submerged body in shallow water[J]. Journal of Ship Mechanics, 2012, 16(8): 868-876. (in Chinese))
- [5] Zhang B. Shape optimization of bow bulbs with minimum wave-making resistance based on Rankine source method[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2012, 17: 65-69.
- [6] Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory[J]. Journal of Computational Physics, 1985, 60(2): 187-207.
- [7] Liu Y J, Nishimura N. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006, 30(5): 371-381.
- [8] Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods[J]. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55(4): 299-324.
- [9] Yoshida K. Applications of fast multipole method to boundary integral equation method[J]. Kyoto: Kyoto University, 2001.
- [10] Lin Z, Liao S. Calculation of added mass coefficients of 3D complicated underwater bodies by FMBEM[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(1): 187-194.
- [11] Cui Y, Qu J, Yang A, et al. Fast Multipole Boundary Element Method of Potential Problems[J]. Journal of Networks, 2014, 9(01): 108-114.
- [12] 李谊乐, 刘应中, 缪国平. Bankine 源高阶边界元法求解势流问题[J]. 水动力学研究与进展 (A 辑), 1999, 1. (LI Yi-le, LIU Ying-zhong, LIAO Guo-ping. Potential Flow Solution Using Higher—Order Boundary Element Method with Rankine Source [J]. Journal of Hydrodynamics (Ser. A), 1999, 1. (in Chinese))
- [13] 李广年, 陈庆任, 谢永和, 等. 基于时域面元法的非对称双体船兴波阻力计算[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2013, 3: 015. (LI Guang-nian, CHEN Qing-ren, XIE Yong-he. Computational research on wave-making resistance of asymmetric catamaran based on the panel method in time domain [J]. Journal of Hydrodynamics (Ser. A), 2013, 3:015. (in Chinese))
- [14] 王献孚, 韩久瑞. 机翼理论[J]. 1987.136. (WANG Xian-fu, HAN Jiu-rui. Wing theory [J]. 1987.136 (in Chinese))
- [15] Liu Y H, Kim C H, Lu X S. Comparison of higher-order boundary element and constant panel methods for hydrodynamic loadings[C]//The First ISOPE European Offshore Mechanics Symposium. International Society of Offshore and Polar

- Engineers, 1990.
- [16] Romate J E. The numerical simulation of nonlinear gravity waves in three dimensions using a higher order panel method[J]. 1989.
- [17] Zwillinger D. CRC standard mathematical tables and formulae[M]. CRC press, 2011.
- [18] 林志良. 比例边界有限元法及快速多极子边界元法的研究与应用[D]. 上海交通大学, 2010. (LIN Zhi-liang. Research and Application of Scaled Boundary FEM and Fast Multipole BEM [D]. Shanghai Jiao Tong University, 2010. (in Chinese))
- [19] Dommermuth D G, Yue D K P. Numerical simulations of nonlinear axisymmetric flows with a free surface[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 178: 195-219.
- [20] 冯大奎. 绕船舶自由面流动的时域分析和数值计算[D]. 华中科技大学, 2008. (FENG Da-kui. Time Domain Analysis and Numerical Simulation on the Free Surface Flow around the ship [D]. Hua zhong University of Science and Technology, 2008. (in Chinese))